CÔNICAS V1.40

Julho/2011
Prof. Marco Aurélio P. Cabral
Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática – UFRJ

1 – Introdução

A história das cônicas se inicia na Grécia antiga. Menaechmus (350 A.C.) foi um dos pioneiros no estudo das cônicas, estudando-as sob o ponto de vista da intersecção de cone e plano utilizando a excentricidade. Euclides (300 A.C.) escreveu um livro sobre as seções cônicas que se perdeu. Apolônio (225 A.C.) escreveu sete livros sobre as cônicas, com os primeiro quatro livros baseados no de Euclides. Apolônio criou os nomes elipse, parábola e hipérbole (ver [Bu] p. 197–198 e [Bo]).

Kepler (1604) descobriu pela análise de observações astronômicas e Newton (1670) provou matematicamente baseado na lei da gravitação universal, que os planetas se movem em elipses. A Geometria antiga (aparentemente "inútil") dos gregos se tornou a base da astronomia moderna (ver [Cx]).

O estudo moderno de cônicas fornece um belo exemplo de como mudanças de coordenadas podem simplificar o tratamento de problemas. Mostra também como o mesmo problema pode ser abordado de formas distintas.

2 – Três Definições

Podemos definir as cônicas de três modos distintos: por Geometria Espacial, Plana e Analítica.

2.1. Seções de um cone por um plano (Geometria Espacial)

ELIPSE: plano corta somente um dos ramos do cone e não é paralelo à geratriz (forma uma figura finita).
HIPÉRBOLE: plano corta os dois ramos do cone; a parte de "baixo" e de "cima" (forma uma figura infinita).
PARÁBOLA: plano corta somente um dos ramos do cone e é paralelo à geratriz (forma uma figura infinita).

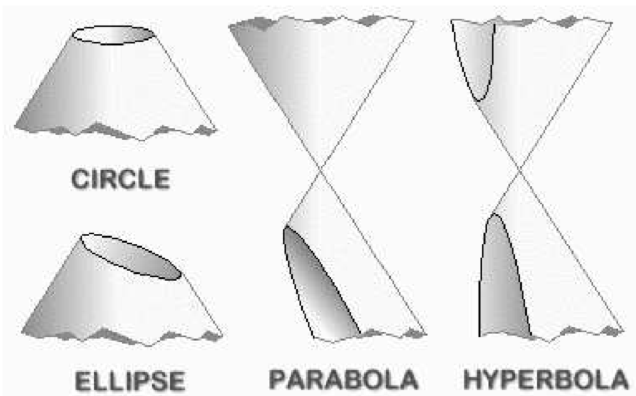

Figura 1: Seções do Cone: Círculo, Elipse, Parábola e Hipérbole [MAO]

Exercício 1: Utilizando a definição acima, como obter as cônicas degeneradas (observe a Figura 1):
(a) Um ponto; (b) Duas retas; (c) Uma reta;
(d) Conjunto vazio; Dica: considere um cone degenerado em reta.
(e) Todo o plano; Dica: considere um cone degenerado em plano.

2.2. Lugar geométrico (Geometria Plana)

ELIPSE: Lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias até dois pontos F_1 e F_2 é

constante.
HIPÉRBOLE: Lugar geométrico dos pontos do plano cuja diferença, em valor absoluto, das distâncias até dois pontos F_1 e F_2 é constante.
PARÁBOLA: Lugar geométrico dos pontos do plano cuja distância até um ponto F é igual a distância até uma reta r.

Seja Π um plano, $d(P, Q)$ a distância entre os pontos $P, Q \in \Pi$ e $d(P, r)$ a distância entre o ponto P e a reta r. Com esta notação:
ELIPSE $= \{P \in \Pi;\ d(P, F_1) + d(P, F_2) = C\}$
HIPÉRBOLE $= \{P \in \Pi;\ |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = C\}$
PARÁBOLA $= \{P \in \Pi;\ d(P, F) = d(P, r)\}$

Exercício 2: Utilizando a definição acima, como obter as cônicas degeneradas:
(a) Conjunto vazio. (b) Um ponto. Dica: Elipse.
(c) Uma reta. Dica: Parábola. (d) Todo o plano. Dica: hipérbole.

2.3. Soluções de equação polinomial do segundo grau (Geometria Analítica)

CÔNICA $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\}$.

A classificação das soluções deste polinômio do segundo grau em x e y é feita em dois estágios: eliminação de bxy (por rotação) e dos termos lineares (por translação).

Exercício 3: Considere $a(x^2 + y^2) + dx + ey + f = 0$ com $a \neq 0$.
(a) Prove que representa uma circunferência se, e somente se, $d^2 + e^2 > 4af$.
(b) Determine centro e raio. R: centro $C(-d/(2a), -e/(2a))$ e raio $r = \sqrt{d^2 + e^2 - 4af}/2|a|$.

2.3.1 Eliminação de bxy. Fazemos isto rodando o sistema de coordenadas por um ângulo θ escolhido adequadamente. Para isto introduzimos novas variáveis $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$, definidas por:

$$\begin{cases} \widetilde{x} = x\cos\theta + y \operatorname{sen}\theta, \\ \widetilde{y} = -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta, \end{cases} \quad \text{ou, matricialmente,} \quad \begin{bmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Como (uma matriz é a inversa da outra – verifique!)

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

multiplicando pela inversa dos dois lados temos que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{bmatrix}.$$

Agora substituímos $x = \cos\theta\,\widetilde{x} - \operatorname{sen}\theta\,\widetilde{y}$, $\quad y = \operatorname{sen}\theta\,\widetilde{x} + \cos\theta\,\widetilde{y}$ na equação $ax^2 + bxy + y^2$ e podemos zerar o termo em $\widetilde{x}\widetilde{y}$ se (exercício) tomarmos θ tal que $\tan(2\theta) = b/(a - c)$. Após esta mudança de coordenadas a equação se transformará em:

$$A\widetilde{x}^2 + C\widetilde{y}^2 + d_1\widetilde{x} + e_1\widetilde{y} + f_1 = 0.$$

Note que se A ou C for zero obtemos a equação de uma parábola.

Exercício 4:
(a) Prove que a matriz acima representa uma rotação;
(b) Faça a troca de variáveis acima e prove que o termo misto $\widetilde{x}\widetilde{y}$ desaparece se $\tan(2\theta) = b/(a - c)$;
(c) Se $a = c$ teríamos que ter $\tan(2\theta) = \pm\infty$. Isto será verdade se $2\theta = 90^o$ e portanto $\theta = 45^o$. Isto pode ser verificado diretamente. Mude coordenadas de $ax^2 + bxy + ay^2$ $(a = c!)$ tomando $x = \sqrt{2}/2(\widetilde{x} - \widetilde{y})$, $\quad y = \sqrt{2}/2(\widetilde{x} + \widetilde{y})$ e mostre que o termo misto $\widetilde{x}\widetilde{y}$ desaparece.
(d) Observe que o ângulo de rotação não é único pois pedimos apenas que $\tan(2\theta) = C$. Quantos ângulos distintos podem ser utilizados? Qual a relação entre esses ângulos? Pense algebricamente (em termos de $k\pi + \cdots$) e geometricamente (círculo trigonométrico). Como isto afetará a transformação acima?
(e) Prove que $4ac - b^2 = 4AC$.

Exercício 5: Como obter os coeficientes da matriz de rotação?
(a) Defina $k = b/(a-c)$. Prove que $(\cos(2\theta))^2 = 1/(k^2+1)$;
(b) Agora temos que fixar um (dos 4 valores possíveis) para θ. Restringindo 2θ ao primeiro (se $k > 0$) e quarto quadrante (se $k < 0$), vamos ter que $-\pi/4 < \theta \leq \pi/4$. Nos dois casos podemos fixar $\cos > 0$ e somente variar o sinal de seno. Nestas condições prove que

$$\cos(2\theta) = 1/\sqrt{k^2+1} \quad \text{com} \quad k = b/(a-c).$$

Assim fixe

$$m = \cos(2\theta) = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{|a-c|}{\sqrt{b^2+(a-c)^2}}.$$

Se $k > 0$ prove que

$$\text{sen}(\theta) = \sqrt{\frac{1-m}{2}} \quad \text{e} \quad \cos(\theta) = \sqrt{\frac{1+m}{2}}.$$

Se $k < 0$ prove que

$$\text{sen}(\theta) = -\sqrt{\frac{1-m}{2}} \quad \text{e} \quad \cos(\theta) = \sqrt{\frac{1+m}{2}}.$$

Exercício 6: Suponha que $b^2 - 4ac = 0$.
(a) Mostre que a e c possuem o mesmo sinal (ambos positivos ou ambos negativos).
(b) Vamos assumir daqui em diante que a e c são positivos, pois caso contrário basta multiplicar a equação por -1. Mostre que se $k > 0$ (ou seja, se $b > 0$), $\text{sen}\,\theta = \sqrt{c/(a+c)}$ e $\cos\theta = \sqrt{a/(a+c)}$ e se $k < 0$ (ou seja, se $b < 0$), $\text{sen}\,\theta = -\sqrt{c/(a+c)}$ e $\cos\theta = \sqrt{a/(a+c)}$.
(c) Prove que os termos do segundo grau $ax^2 + bxy + cy^2$ formam um quadrado perfeito.
(d) Utilize o item (b) diretamente (sem utilizar o item (a)) e introduza novas variáveis $\widetilde{x}$ e $\widetilde{y}$ tais que a equação se transforme em $A\widetilde{x}^2 + D\widetilde{x} + E\widetilde{y} + F = 0$. Dica: $\widetilde{x} = (\sqrt{a}x + \sqrt{c}y)/\sqrt{a+c}$ (se $b > 0$) ou $\widetilde{x} = (-\sqrt{a}x + \sqrt{c}y)/\sqrt{a+c}$ (se $b < 0$).
(e) Discuta as possibilidades quando $d = e = 0$. R: Continua uma parábola.
(f) Discuta as possibilidades quando $D = E = 0$. R: Dependendo do sinal de F, vazio, duas retas paralelas ou uma reta passando na origem.

2.3.2 Eliminação de $\mathbf{d_1\widetilde{x}}$ e $\mathbf{e_1\widetilde{y}}$. Complete o quadrado e obtenha uma equação da forma:

$$A(\widetilde{x}-x_0)^2 + C(\widetilde{y}-y_0)^2 = F \quad \text{ou} \quad A(\widetilde{x}-x_0)^2 + e_1\widetilde{y} = F \quad \text{ou} \quad d_1\widetilde{x} + C(\widetilde{y}-y_0)^2 = F.$$

Transladamos os eixos introduzindo as variáveis $X = \widetilde{x} - x_0$ e $Y = \widetilde{y} - y_0$, sendo que no caso de parábola tomamos $X = \widetilde{x}$ ou $Y = \widetilde{y}$. Obtemos

$$AX^2 + CY^2 = F \quad \text{ou} \quad AX^2 + e_1Y = F \quad \text{ou} \quad d_1X + CY^2 = F$$

que pode ser classificada, desprezando os casos degenerados (reta(s), ponto, vazio) pelos sinais de A e C:
ELIPSE ($A \cdot C > 0$) sinais iguais, ambos positivos ou ambos negativos;
HIPÉRBOLE ($A \cdot C < 0$) sinais distintos, um positivo e outro negativo;
PARÁBOLA ($A \cdot C = 0$) um dos sinais igual a zero.

Observação: Pelo sinal do chamado discriminante $b^2 - 4ac$, que é igual a $-4AC$ por exercício anterior, podemos classificar a cônica sem necessidade de rodar os eixos explicitamente.

Mais adiante provaremos que $y = ax^2 + c$ é uma parábola, $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ é uma elipse e $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$ é um hipérbole. Estas equações são chamadas de formas canônicas (padrão) das cônicas.

Exercício 7: Escreva, utilizando as formas canônicas, equações para as cônicas degeneradas:
(a) Conjunto vazio; (b) Um ponto; (c) Uma reta; (d) Todo o plano;
(e) Um par de retas paralelas; (f) Um par de retas concorrentes.

Exercício 8: Prove que o gráfico de grandezas inversamente proporcionais é uma hipérbole.

Exercício 9: Troque variáveis e classifique as cônicas abaixo: Usando o `maxima` pode-se trocar variáveis adaptando os comandos abaixo:

```
kill(all);
senn: sqrt(2)/2;
coss: sqrt(1-senn^2);
x: coss*X - senn*Y;
y: senn*X + coss*Y;
expand(5*x^2 - 6*x*y + 5*y^2 - 1);
```

(a) $y^2 + 2x\,y - 2y + x^2 + 2x = 0$. R: A parábola $X^2 = \sqrt{2}Y$.
(b) $3\,y^2 + 2\,x\,y + 3\,x^2 + 2 = 0$. R: O conjunto vazio $2X^2 + Y^2 + 1 = 0$.
(c) $5\,y^2 - 6\,x\,y + 5\,x^2 - 1 = 0$. R: A elipse $8Y^2 + 2X^2 = 1$.
(d) $2\,x\,y + \frac{4\,x}{\sqrt{2}} = 0$. R: Duas retas $(X+1)^2 = (Y+1)^2$ (retas $X = Y$ e $X = -Y - 2$).
(e) $2\,x\,y + 2\,y + 2\,x + 1 = 0$. R: A hipérbole $(X + \sqrt{2})^2 - Y^2 = 1$.
(f) $7\,y^2 - 48\,x\,y - 7\,x^2 = 0$. R: Duas retas $Y^2 = X^2$ (retas $Y = \pm X$) ($\operatorname{sen}\theta = 3/5$).
(g) $8\,y^2 - 4\,x\,y + 5\,x^2 = 1$. R: A elipse $4X^2 + 9Y^2 = 1$ ($\operatorname{sen}\theta = \sqrt{5}/5$).
(g) $3\,y^2 + 2\,\sqrt{3}\,x\,y + 6\,y + 5\,x^2 + 6\,\sqrt{3}\,x + 4 = 0$. R: A elipse $3(X+1)^2 + Y^2 = 1$ ($\operatorname{sen}\theta = 1/2$).
(h) $-9\,y^2 - 24\,x\,y + 4\,y - 16\,x^2 = 3\,x$. R: A parábola $Y = 5X^2$ ($\operatorname{sen}\theta = 3/5$).
(i) $5\,y^2 - 14\,y + 5\,x^2 - 2\,x + 5 = 0$. R: A elipse $(X-1)^2 + (Y-1)^2 = 1$ ($\operatorname{sen}\theta = 3/5$).

Exercício 10: Vamos determinar sob que condições o polinômio $P(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ é sempre positivo, ou seja, quando $P(x,y) > 0$ para todo $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Dizemos neste caso que $P(x,y)$ é uma forma quadrática positivo definida.
(a) Elimine bxy e mostre que ela é positivo definida se $b^2 - 4ac < 0$ e $a > 0$ (ou $c > 0$).
(b) Determine condições para que ela seja indefinida, i.e., nem positiva nem negativa.
(c) Faça os itens anteriores da seguinte forma. Fatore $P(x,y) = x^2(a + b(y/x) + c(y/x)^2)$. Defina $w = y/x$, $g(w) = a + bw + cw^2$ e estude o sinal da função g.

3 – Aplicações Práticas

Muitas aplicações são baseadas nas propriedades focais das cônicas (Figura 2):
(a) Elipse e Hipérbole: um raio que passe por um foco, após reflexão prosseguirá numa reta que passa pelo outro foco;
(b) Parábola: um raio que passe pelo foco após reflexão será perpendicular à reta diretriz (e vice-versa).

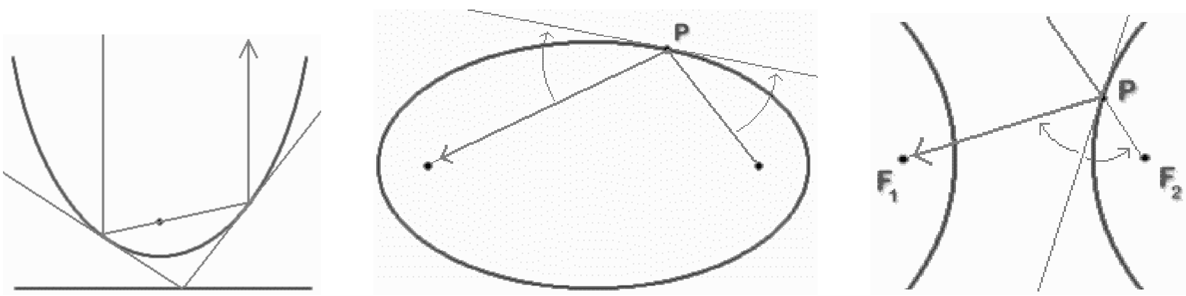

Figura 2: Propriedades focais da parábola, elipse e hipérbole [MAO]

Note que embora seja necessário o conceito de limite para definir a reflexão de raios de luz em espelhos curvos, pode-se provar com Geometria Sintética (vide Seção 10) estes resultados.

3.1 Elipse: Galeria sussurrante no capitólio em Washington DC e na Catedral de São Paulo em Roma; tratamento de pedra nos rins (litotripsia): pedra num dos focos e ondas sonoras de alta intensidade. Luminária de dentista, que concentra luz no dente e evita que ofusque o paciente. Trajetórias dos planetas e cometas em torno do sol; Utilizando geometria analítica veremos mais adiante porque surgem elipses no copo d'água e no bambolê da Figura 3.

3.2 Parábola: Antena parabólica (vide Figura 5), farol dos carros, lanternas, rádio telescópio, escuta secreta. Trajetória de projéteis (Galileu demonstrou isto, vide Figura 4). Trajetória da água

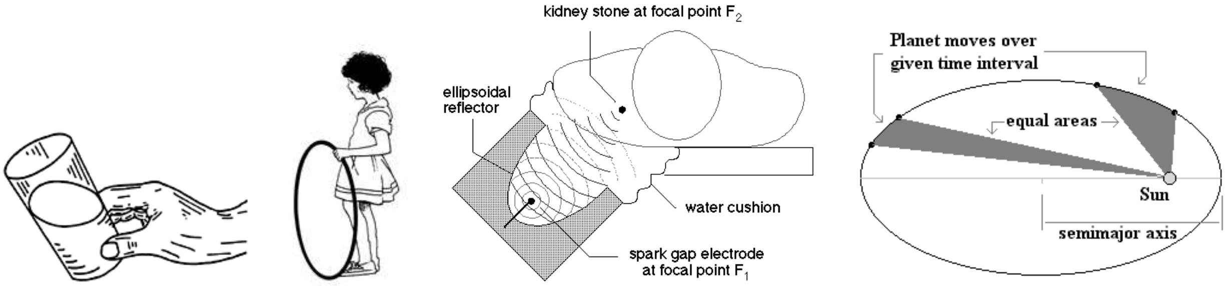

Figura 3: Aplicações da Elipse (copo e bambolê [Br]; litotripsia [Fr]; órbita [MAO])

num bebedouro (Figura 4) e o salto de um golfinho (Figura 4). Espelho parabólico (ver [Kl] p. 272 para mexer luz no foco), transmissão de sinais (pode ser visto no parque da ciência da Fundação Osvaldo Cruz do Rio de Janeiro, para transmitir voz).

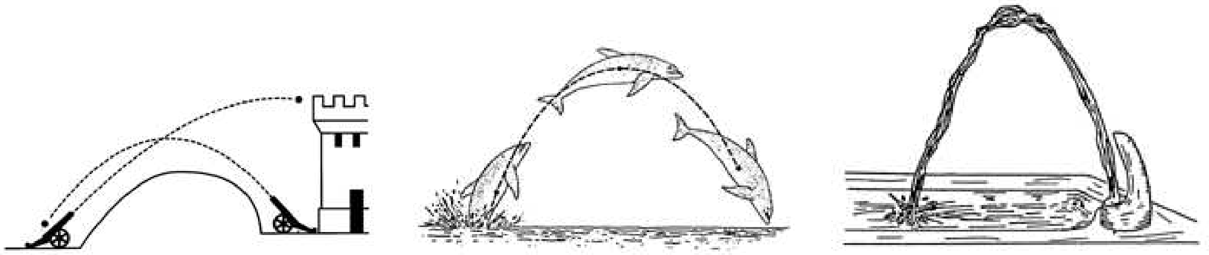

Figura 4: Aplicações da Parábola [Br]

3.3 Hipérbole: Zona de escuta do barulho emitido por um avião subsônico, pois a intersecção do cone de som com o solo forma uma hipérbole (vide Figura 5). Difusão da luz em luminárias de iluminação pública. Lentes do telescópio de Cassegrain (vide Figura 5). Luz de abajur na parede (vide Figura 5 e [Ca]).

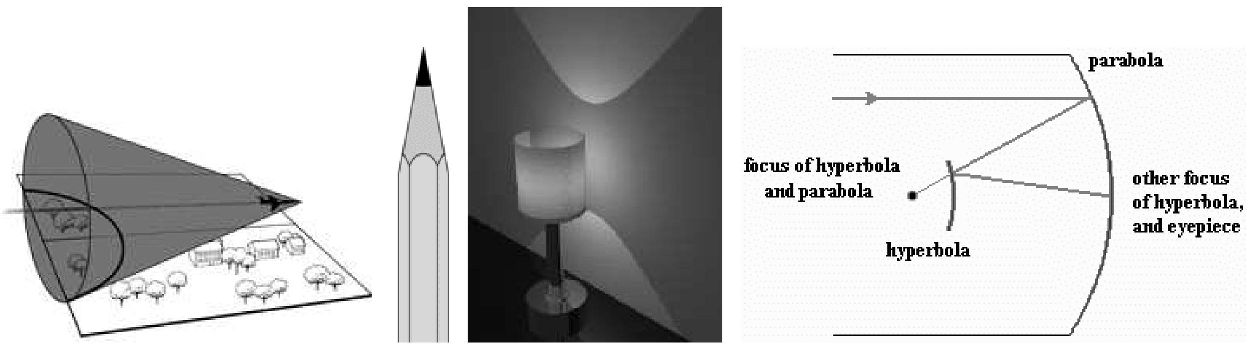

Figura 5: Aplicações da Hipérbole 1 (avião e lápis de [Br]; abajur [LAB]; telescópio [MAO])

Exercício 11: Onde e porque surge uma hipérbole no lápis da Figura 5?

Exercício 12: Porque a sombra do abajur na parede (vide Figura 5) é uma hipérbole?

Uma aplicação militar é o LORAN – Long Range Navigation: Duas estações de rádio transmitem simultaneamente sinais para um barco ou avião. Diferença de tempo localiza ramo de parábola. Com uma terceira estação pode-se calcular interseção das duas parábolas.

Torre de refrigeração de usina de energia (termoelétricas e nucleares) necessita dissipar muito calor e para isto deve ser construída com material forte. Partindo de um cilindro, cujas laterais são formadas por arames, rodando uma das bases, obtemos um hiperboloide de revolução (uma superfície quádrica cujos corte formam hipérboles) cujas laterais são segmentos de retas que podem ser feitos de barra de aço, formando uma estrutura bastante resistente (vide Figura 6).

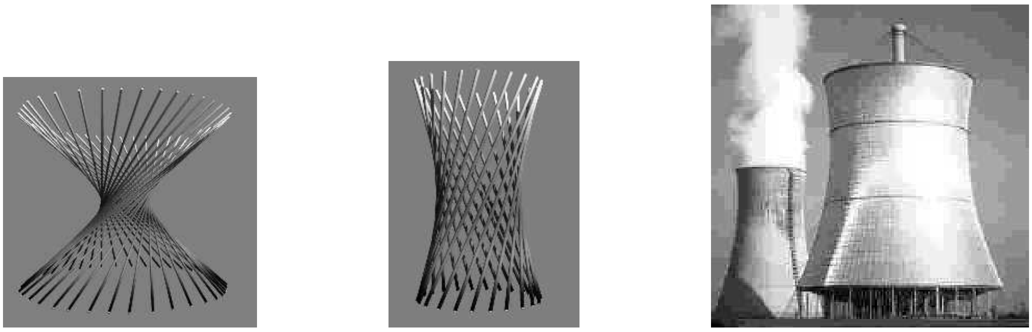

Figura 6: Aplicações da Hipérbole 2: torre de refrigeração [LAB]

4 – Formas Canônicas são Cônicas

4.1 Parábola: Porque $y = aX^2 + c$ é uma parábola (para $a \neq 0$) ?
Se definirmos $Y = y - c$ e $p = 1/(4a)$ e substituirmos na equação acima obtemos

$$X^2 = 4pY.$$

Como $(Y + p)^2 - (Y - p)^2 = 4pY$, obtemos que $X^2 = 4pY = (Y + p)^2 - (Y - p)^2$. Logo

$$X^2 + (Y - p)^2 = (Y + p)^2.$$

Denotando $P = (X, Y)$ e definindo o foco $F = (0, p)$ e a reta diretriz r por $Y = -p$, esta equação é equivalente a $d(P, r) = d(P, F)$. Note que nessas coordenadas o vértice é $(X, Y) = (0, 0)$. Nas aplicações basta saber o foco, vértice e diretriz da equação simplificada $X^2 = 4pY$ ou, de forma equivalente, $Y = aX^2$ com $p = 1/(4a)$.

4.2 Elipse: Porque $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ é uma elipse ?
Assuma, sem perda de generalidade, que $a > b$ e defina $c^2 = a^2 - b^2$. Multiplicando a equação por a^2b^2 obtemos $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Substituindo $b^2 = a^2 - c^2$ obtemos $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$. Multiplicando os termos e rearrumando obtemos $a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 + a^4$. Somando $2a^2cx$ em ambos os lados podemos reescrever como $(cx + a^2)^2 = a^2((x + c)^2 + y^2)$. Tirando a raiz quadrada em ambos os lados obtemos $cx + a^2 = a\sqrt{(x + c)^2 + y^2}$. Observe que $4cx = (x+c)^2 - (x-c)^2$. Portanto se multiplicarmos ambos os lados por 4 e utilizarmos esta relação obtemos $(x+c)^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + 4a^2 = (x-c)^2$. Somando y^2 em ambos os lados, $(x+c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + 4a^2 = (x-c)^2 + y^2$. Portanto chegamos a equação: $(2a - \sqrt{(x + c)^2 + y^2})^2 = (x - c)^2 + y^2$. Tirando a raiz quadrada em ambos os lados e rearrumando obtemos $\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a$. Se denotarmos os focos $F_1 = (c, 0)$, $F_2 = (-c, 0)$ e $P = (x, y)$ esta equação é equivalente a $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$.

Exercício 13: Seguindo [Av], observe que provamos que se um ponto satisfaz a equação $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ então este ponto pertence a elipse. Para mostrar a volta temos que tomar cuidado pois $k = l$ implica que $k^2 = l^2$, mas a recíproca não é verdadeira. Porém se $k, l \geq 0$ então $k = l$ é equivalente a $k^2 = l^2$. Prove utilizando a dedução acima que todo ponto da elipse satisfaz esta equação (a recíproca).

4.3 Hipérbole: Porque $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$ é um hipérbole ?
Defina $c^2 = a^2 + b^2$. Substituindo e fazendo operações semelhantes ao da elipse obtemos a equação $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$.

Exercício 14:
(a) Prove que se $a > b$ a localização dos focos da elipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ será em $(-c, 0)$, $(c, 0)$ com $c^2 = a^2 - b^2$. Dica: Assumindo que os focos estão no eixo-x, estude os pontos extremos da elipse, quando $x = 0$ e quando $y = 0$.
(b) Prove que a localização dos focos da hipérbole $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$ será em $(-c, 0)$, $(c, 0)$ com $c^2 = a^2 + b^2$. Dica: Veja dica do item anterior.

(c) Na equação da hipérbole $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$ escreva y em função de x e determine as retas que se aproximam dela para x grande, as chamadas assíntotas. Dica: para x grande, $\sqrt{x^2+a} \approx |x|$.
(d) Na equação da parábola $y = ax^2$, sabendo que o foco está no eixo-y e que a reta diretriz é paralela ao eixo-x, determine diretamente (sem usar o que foi desenvolvido no texto) o foco e a reta diretriz em função de a.

Exercício 15: Para cada uma das cônicas abaixo, determine o foco (ou focos), reta diretriz (se for parábola) e assíntotas (se for hipérbole). Dica: Transforme na equação padrão após translação e/ou rotação de eixos.
(a) $2x = y^2 + 8y + 22$. R: parábola, $F(7/2, -4)$, $x = 5/2$.
(b) $4x^2 + y^2 = 16$. R: elipse, $F(0, \pm 2\sqrt{3})$.
(c) $y^2 - x^2 = 4$. R: hipérbole, $F(0, \pm 2\sqrt{2})$, $y = \pm x$.
(d) $x^2 = 4y - 2y^2$. R: elipse, $F(\pm 1, 1)$.
(e) $9x^2 - 18x + 4y^2 = 27$. R: elipse, $F(1, \pm\sqrt{5})$.
(f) $x^2 + 4x + 28 = 8y$. R: parábola, $F(-2, 5)$, $y = 1$.
(g) $y^2 + 2y = 4x^2 + 3$. R: hipérbole, $F(0, -1 \pm \sqrt{5})$, $y + 1 = \pm 2x$.
(h) $y^2 + 2y + 12x + 25 = 0$. R: parábola, $F(-5, -1)$, $x = 1$.
(i) $2y^2 - 3x^2 - 4y + 12x + 8 = 0$. R: hipérbole, $F(2 \pm \sqrt{15}, 1)$, $y = 1 \pm \sqrt{6}/2(x-2)$.

Exercício 16: Encontre uma equação para a cônica que satisfaça as condições abaixo:
(a) parábola: vértice $(0,0)$; foco $(0,-2)$. R: $x^2 = -8y$.
(b) parábola: foco $(-4,0)$; diretriz $x = 2$. R: $y^2 = -12(x+1)$.
(c) elipse: focos $(\pm 2, 0)$; vértices $(\pm 5, 0)$. R: $x^2/25 + y^2/21 = 1$.
(d) elipse: focos $(0,2)$ e $(0,6)$; vértices $(0,0)$ e $(0,8)$. R: $x^2/12 + (y-4)^2/16 = 1$.
(e) hipérbole: focos $(0, \pm 3)$; vértices $(0, \pm 1)$. R: $y^2 - x^2/8 = 1$.
(f) hipérbole: focos $(1,3)$ e $(7,3)$; vértices $(2,3)$ e $(6,3)$. R: $(x-4)^2/4 - (y-3)^2/5 = 1$.
(g) hipérbole: vértices $(\pm 3, 0)$; assíntotas $y = \pm 2x$. R: $x^2/9 - y^2/36 = 1$.

Exercício 17:
(a) Verifique que $x(t) = a\cos t$ e $y(t) = b \operatorname{sen} t$ é a equação paramétrica de uma elipse.
(b) Verifique que $x(t) = a\cosh t$ e $y(t) = b \operatorname{senh} t$ é a equação paramétrica da hipérbole (justificando o nome das funções seno e cosseno hiperbólico), onde $\cosh t = (e^t + e^{-t})/2$ e $\operatorname{senh} t = (e^t - e^{-t})/2$

5 – Intersecção de Cone com Plano Gera Cônica

5.1. Equação do Cone

Vamos deduzir a equação do cone. Dado um cone qualquer introduzimos o seguinte sistema de coordenadas: O eixo-z será o eixo de simetria do cone, a origem o vértice do cone e o plano x-y perpendicular ao eixo-z.

Cortando o cone com um plano paralelo ao plano x-y obtemos um círculo de raio r. Dado um ponto (x, y) deste círculo, pelo Teorema de Pitágoras o raio $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (veja Figura 7). Como a coordenada z deste ponto é diretamente proporcional a r pelo exercício abaixo, temos que $z = \alpha r$.

Portanto $z^2 = \alpha^2 r^2 = \alpha^2(x^2 + y^2)$. Logo a equação do cone é: $z^2 = \alpha^2(x^2 + y^2)$.

Exercício 18: Utilizando semelhança de triângulo prove que $z = \alpha r$.

Exercício 19:
(a) Como obter uma reta (cone degenerado) igual ao eixo-z? R: Quando $\alpha \to \infty$ temos que $r/z = 1/\alpha \to 0$, o que implica $r = 0$. Logo $x^2 + y^2 = 0$ o que implica em $x = 0$ e $y = 0$.
(b) Como obter o plano x-y (cone degenerado)? R: Quando $\alpha \to 0$ temos que $z/r = \alpha \to 0$, o que implica $z = 0$, o plano x-y.
(c) Para estes dois casos imagine geometricamente um cone se transformando em uma reta e depois em um plano (num caso o cone aumenta de tamanho e no outro diminui).

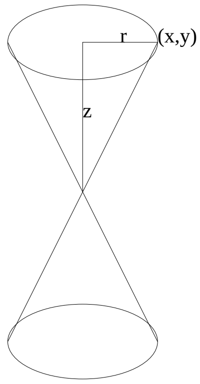

Figura 7: Dedução da Equação do Cone

Exercício 20: Porque observamos uma elipse no bambolê da Figura 3? Dica: Utilize a equação do círculo $x^2+y^2=c^2$ e rode sistema de coordenadas com $(x,y,z) = (X, \cos\theta Y + \operatorname{sen}\theta Z, -\operatorname{sen}\theta Y + \cos\theta Z)$ e intercepte com o plano $Z=0$.

Exercício 21: Porque observamos uma elipse no copo d'água da Figura 3? Dica: Utilize equação do cilindro $x^2+y^2=c^2$ e exercício anterior.

5.2. Gerando círculo, elipse, hipérbole, parábola

Para esta parte considere $\alpha = 1$, de modo que a equação do cone aqui será: $z^2 = x^2+y^2$. Observe novamente a Figura 1 para ver os planos cortando o cone.

CÍRCULO: considere o plano $z=\beta$. Logo obtemos $x^2+y^2=\beta^2$, a equação do círculo de raio $|\beta|$.

HIPÉRBOLE: considere o plano $x=\beta$. Logo obtemos $(z/\beta)^2-(y/\beta)^2=1$, a equação de uma hipérbole.

PARÁBOLA: considere o plano $x-z=\beta$. Logo obtemos $z=-(y^2/(2\beta)+\beta/2)$, a equação de uma parábola.

ELIPSE: considere o plano $x=2z+1$ (ou de forma mais geral $x=\gamma z+\beta$ com $|\beta|<|\gamma|$). Logo obtemos

$$\left(\frac{z+2/3}{1/3}\right)^2+\left(\frac{y}{1/\sqrt{3}}\right)^2=1$$

a equação de uma elipse.

Exercício 22: O que acontece com o caso geral, quando o plano é $x=\gamma z+\beta$?

Observação: O fato que intersecção de cone com plano gera cônica é um caso particular do fato que a intersecção de uma quádrica (elipsoide, paraboloide hiperbólico, hiperboloide de uma folha, cilindro, cone, etc.) com plano gera cônica. A demonstração é uma simples adaptação da que foi feita acima.

5.3. Cortando o cone com um plano arbitrário

Um plano arbitrário é dado por $ax+by+cz+d=0$. Sem perda de generalidade assumimos que $a=1$ (porque ?) e trocamos os sinais: $x-by-cz-d=0$. Logo $x=by+cz+d$. Substituindo na equação do cone obtemos:

$$\alpha^2(1+b^2)y^2+2bc\alpha^2yz+(\alpha^2c^2-1)z^2+2\alpha^2d(by+cz)+\alpha^2d^2=0.$$

Esta é uma equação quadrática em yz (polinômio do segundo grau), que é a equação geral das cônicas. Portanto a intersecção de um plano e um cone gera uma cônica.

6 – Excentricidade e uma Definição Geométrica Unificada

Podemos definir através da Geometria sintética, de forma unificada, todas as cônicas.
CÔNICA: Lugar geométrico dos pontos do plano cuja razão entre a distância até um ponto F e a distância até uma reta r é igual a uma constante.

Se denotarmos esta constante por e (chamada de excentricidade), podemos redefinir:
CÔNICA $= \{P \in \Pi;\ d(P,F) = e \cdot d(P,r)\}$

Se introduzirmos um sistema de coordenadas tal que a reta r vire o eixo y e $F = (p,0)$, a equação acima se transforma em $\sqrt{(x-p)^2+y^2} = e\sqrt{x^2}$. Elevando ao quadrado ambos os lados obtemos

$$(1-e^2)x^2 - 2px + y^2 + p^2 = 0.$$

Para $e = 1$ obtemos uma parábola. Para $e \neq 1$, completando o quadrado, obtemos (verifique !):

$$\frac{(x - \frac{p}{1-e^2})^2}{p^2e^2/(1-e^2)^2} + \frac{y^2}{p^2e^2/(1-e^2)} = 1.$$

Como o sinal do termo em y depende do sinal de $1-e^2$, concluímos que se $e < 1$ temos uma elipse e se $e > 1$ uma hipérbole.

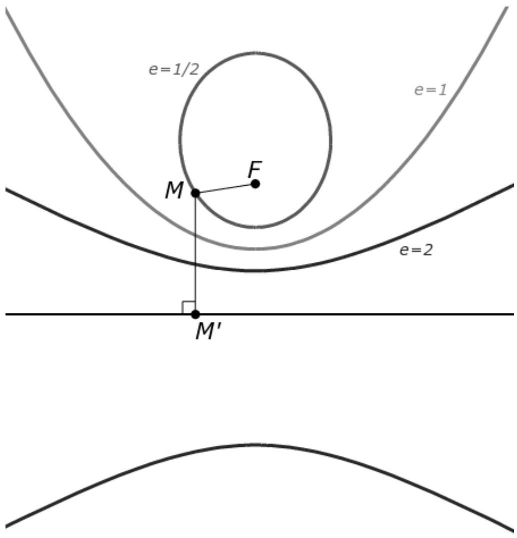

Figura 8: Excentricidade: elipse ($e = 1/2$), parábola ($e = 1$) e hipérbole ($e = 2$) [Wi]

Exercício 23:
(a) Prove que $F = (p,0)$ é um dos focos da cônica (elipse ou hipérbole);
(a) Prove que $e = c/a$.

Exercício 24: Como podemos obter um círculo na definição acima?

Exercício 25: Note que três definições utilizam a Geometria Sintética e que a outra utiliza Geometria Analítica.
(a) Quais são as vantagens e desvantagens?
(b) Qual a mais elegante?
(c) Questão filosófica: "Qual o melhor método: Geometria analítica ou Geometria Sintética ?" (ver [Ba])
(d) São todas equivalentes entre si?

7 – Desenhando (Esboçando) Cônicas com Régua e Compasso

7.1 Elipse: ([Fi] p. 380)
1. Traçar segmento AB e marcar os dois focos F_1 e F_2 tais que $\overline{F_1F_2} < \overline{AB}$.
2. Dividir segmento AB em intervalos com pontos $P_i \in AB$.
3. Para cada ponto P_i, traçar um círculo de raio $\overline{AP_i}$ centrado em F_1 e um círculo de raio $\overline{P_iB}$ centrado em F_2. Os pontos de intersecção destes círculos, se existirem, fazem parte da elipse.

Exercício 26:
(a) Porque este pontos fazem parte da elipse ?

(b) Para quais pontos P_i marcados a intersecção dos círculos correspondente será vazia ?
R: $\overline{AP_i} < (\overline{AB} - \overline{F_1F_2})/2$ e $\overline{BP_i} < (\overline{AB} - \overline{F_1F_2})/2$.

7.2 Hipérbole: ([Fi] p. 397)

1. Traçar segmento AB e marcar os dois focos F_1 e F_2 tais que $\overline{F_1F_2} > \overline{AB}$.
2. Marcar pontos P_i fora do segmento AB, na semirreta $\overrightarrow{AB}$.
3. Para cada ponto P_i, traçar um círculo de raio $\overline{AP_i}$ centrado em F_1 e um círculo de raio $\overline{BP_i}$ centrado em F_2. Os pontos de intersecção destes círculos, se existirem, fazem parte da hipérbole.

Exercício 27:
(a) Porque este pontos fazem parte da hipérbole ?
(b) Para quais pontos P_i marcados a intersecção dos círculos correspondente será vazia ?
R: $\overline{AP_i} < (\overline{F_1F_2} - \overline{AB})/2$ e $\overline{BP_i} < (\overline{F_1F_2} - \overline{AB})/2$.

7.3 Parábola: ([Fi] p. 408)

1. Marcar foco F e reta diretriz r.
2. Traçar uma perpendicular a reta r passando por F, o eixo da parábola. Marcar A, o ponto de intersecção do eixo da parábola com r.
3. Marcar pontos P_i no eixo da parábola na semirreta $\overrightarrow{AF}$.
4. Para cada ponto P_i, traçar uma paralela a r passando por P_i e um círculo de raio $\overline{AP_i}$ centrado em F. Os pontos de intersecção da reta e do círculo, se existirem, fazem parte da parábola.

Exercício 28:
(a) Porque este pontos fazem parte da parábola ?
(b) Para quais pontos P_i marcados a intersecção será vazia ? R: $\overline{AP_i} < (\overline{AF})/2$.

Exercício 29: Esboce cada uma das cônicas num papel seguindo o procedimento descrito acima.

8 – Desenhado (Esboçando) Cônicas com Dobraduras

Nas construções a seguir cada dobra gera uma reta. As cônicas são esboçadas como o "envelope" deste conjunto de retas obtidas a partir de cada dobra. Cada reta é tangente à cônica.

8.1 Parábola:

1. Traçar reta diretriz r.
2. Marcar pontos P_i equiespaçados em r e numerá-los.
3. Na frente e verso do papel marcar o foco F.
4. Dobrar o papel fazendo coincidir F com os pontos P_i.

8.2 Elipse:

1. Traçar uma circunferência C.
2. Marcar pontos P_i equiespaçados em C e numerá-los.
3. Na frente e verso do papel marcar um ponto F **dentro** de C.
4. Dobrar o papel fazendo coincidir F com os pontos P_i.

8.3 Hipérbole:

1. Traçar uma circunferência C.
2. Marcar pontos P_i equiespaçados em C e numerá-los.
3. Na frente e verso do papel marcar um ponto F **fora** de C.
4. Dobrar o papel fazendo coincidir F com os pontos P_i.

Na elipse e na hipérbole os focos são os pontos F e O, onde O é o centro da circunferência C. O raio r da circunferência C é a constante da equação da elipse/hipérbole: $|d(P,O) \pm d(P,F)| = r$. Observe que na parábola a circunferência C se transforma na reta diretriz r, que pode ser pensado como um círculo com raio $r = \infty$.

Exercício 30: Esboce cada uma das cônicas num papel utilizando dobraduras seguindo o procedimento descrito acima.

Exercício 31:
(a) Depois de esboçar uma elipse dobrando uma folha de papel, verifique que pontos equiespaçados

não são a melhor opção para se obter um bom esboço de elipse. Onde os pontos devem ser mais densos para se obter um melhor esboço ?
(b) O que ocorre na construção da elipse se F esta no centro da circunferência?
(c) O que obtemos se F pertence à circunferência?

Exercício 32: Prove que o lugar geométrico dos pontos equidistantes a circunferência e um ponto F é:
(a) Uma elipse se F pertence ao interior da circunferência;
(b) Uma hipérbole se F pertence ao exterior da circunferência.

Exercício 33: Podemos esboçar uma elipse com barbante e alfinete. Prenda uma folha de papel numa placa de isopor com durex. Prenda dois alfinetes (os focos) na folha e amarre cada ponta de um barbante nos alfinetes. Com um lápis estique o barbante e movimente o lápis com o barbante sempre esticado, marcando pontos na folha de papel. Prove que a curva marcada é uma elipse.

9 – Metamorfoses

Aqui nesta seção queremos observar como uma cônica pode se transformar em outra. Estas metamorfoses (transformações) podem ser vistas analiticamente ou pensando na modificação da posição relativa entre o plano e cone, com plano cortando o cone.

9.1 Elipse $\longrightarrow$ Círculo: Quando os dois focos se transformam em um único ponto.

9.2 Elipse $\longrightarrow$ Parábola: Quando um foco vai para o infinito (ver [Fi] p. 410). Considere $y = x^2 + \epsilon^2 y^2$. Esta equação pode ser reescrita como:

$$\left(\frac{y - 1/(2\epsilon^2)}{1/(2\epsilon^2)}\right)^2 + \left(\frac{x}{1/(2|\epsilon|)}\right)^2 = 1.$$

Esta equação representa uma elipse de semi-eixo-x $= 1/(2|\epsilon|)$ e semi-eixo-y $= 1/(2\epsilon^2)$, com ponto de encontro dos semi-eixos da elipse (centro da elipse) igual a $(0, 1/(2\epsilon^2))$. Quando $\epsilon \to 0$, pela primeira equação, obtemos a parábola $y = x^2$ enquanto os semi-eixos e o centro vão para o infinito.

Exercício 34: De forma análoga analisamos a transformação hipérbole $\longrightarrow$ parábola. Mostre que a equação $y = \epsilon^2 y^2 - x^2$ pode ser reescrita como:

$$\left(\frac{y - 1/(2\epsilon^2)}{1/(2\epsilon^2)}\right)^2 - \left(\frac{x}{1/(2|\epsilon|)}\right)^2 = 1.$$

9.3 Hipérbole $\longrightarrow$ duas retas transversais: Quando os dois focos se transformam em um único ponto.

Exercício 35: Repita a análise feita para o item (2) para a equação $x^2 - y^2 = \epsilon^2$, quando $\epsilon \to 0$.

9.4 Elipse $\longrightarrow$ duas retas paralelas: Quando os dois focos vão para o infinito. Considere $x^2 + \epsilon^2 y^2 = 1 = x^2 + (y/(1/\epsilon))^2$. Esta equação representa uma elipse de semi-eixo-x $= 1$ e semi-eixo-y $= 1/\epsilon$, com ponto de encontro dos semi-eixos da elipse (centro da elipse) igual a $(0, 0)$.
Quando $\epsilon \to 0$, obtemos a equação $x^2 = 1$, que representa duas retas paralelas: $x = 1$ e $x = -1$.

9.5 Círculo $\longrightarrow$ ponto: Quando o raio vai para zero.

9.6 Parábola $\longrightarrow$ uma reta: Quando o foco converge para a reta r.

Exercício 36: Para cada uma das transformações anteriores, como observá-la através de intersecção de um cone por um plano ?

10 – Propriedades Provadas com Geometria

Podemos demonstrar propriedades das cônicas através da geometria sintética. Alguns exemplos são a soma das distâncias para os focos ([Fi] p. 382) e propriedades da tangente à elipse ([Fi] p. 384). Estes resultados podem ser demonstrados com geometria analítica e, no caso da tangente, com cálculo. Para ilustrar isto demonstraremos o teorema a seguir:

Teorema: Uma tangente à elipse por um ponto P forma ângulos iguais com os raios ligando P a cada um dos focos.

Prova: Considere uma elipse com focos F e F'.

1. Considere uma secante qualquer MM'.
2. Baixemos a perpendicular FC de um dos focos e tracemos $CF_1 = CF$.
3. Tracemos $F'F_1$ determinando $D \in MM'$.
4. Ligue D a F e M a F e F_1.
5. Afirmo que os ângulos FDM e $F'DM'$ são congruentes. Isto é verdade pois os ângulos $F'DM'$ e CDF_1 são congruentes (opostos pelo vértice) e como os triângulos CDF_1 e CDF são semelhantes por LAL ($CF = CF_1$, CD lado comum e $DCF_1 = DCF$ pois são ângulos retos), os ângulos CDF e CDF_1 são congruentes. Como os ângulos CDF e FDM são idênticos, chegamos ao resultado.
6. Quando $M \to M'$, a secante vai convergir para uma tangente. Os ângulos FDM e $F'DM'$ vão convergir para os ângulos entre os raios ligando P a cada um dos focos e a tangente. Como os ângulos são congruentes para uma secante qualquer, eles serão côngruos no limite também.

Exercício 37: Onde foi utilizada a hipótese que a curva é uma elipse ?!?!? NÃO utilizamos esta hipótese! Ver referência ou descobrir diretamente qual o problema com esta demonstração.

11 – Bibliografia

[Av] Ávila, Geraldo; Como tratar a circunferência, a elipse e a hipérbole; RPM 35 p.9–14 (1997).

[Ba] Barker, Stephen; Filosofia da Matemática; Zahar 1964.

[Bo] Boyer, Carl B; A history of mathematics; Princeton University Press 1985.

[Br] Britton, Jill; página da professora do Camosun College in Victoria, British Columbia, Canada. `http://britton.disted.camosun.bc.ca/jbconics.htm`

[Bu] Bunt, Lucas N. H.; Jones, Phillip S.; Bedient, Jack D; The historical roots of elementary mathematics; Dover Publications 1976.

[Ca] Carneiro, José Paulo Q.; A sombra do meu abajur; RPM 59 (2006).

[Cx] Coxeter, H. S. M; Introduction to geometry; John Wiley & Sons 1969.

[Fr] Frantz, Marc; Página de Medical Lithotripsy; `http://www.math.iupui.edu/m261vis/litho.html`

[Fi] Chaput, Frere; Elementos de Geometria;

[Ga] Gardner, Martin; Penrose tiles to trapdoor ciphers and the return of Dr. Matrix; W. H. Freeman and Company 1989.

[Kl] Kline, Morris; Mathematics and the physical world. Dover Publications 1981.

[LAB] Lycée Alain Borne; França; `http://www.ac-grenoble.fr/lycee/LAB/jr2000`.

[MAO] Math Academy Online; `http://www.mathacademy.com/pr/prime/articles/kepler/`.

[Pa] Pappas, Theoni; The Joy of Mathematics; Wide World Pub 1989.

[Wi] Wikipedia; `http://en.wikipedia.org/`; Conic section.